Concursul Interjudeţean de Matematică ”Grigore C. Moisil”
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Problema 1. Demonstraţi că n numere reale diferite două câte două se află în progresie aritmetică dacă şi numai dacă mulţimea sumelor a câte două din cele n numere conţine exact $2n-1$ elemente.

Vlad Robu

Barem

Întâi vom demonstra implicația ”$\rightarrow$”.
Fie în acest sens numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aflate în progresie aritmetică, de rație $r > 0$. Fie $a = a_1 - r$ și $a_k = a + kr$, pentru orice $k \in \overline{1, n}$. Atunci toate sumele a câte două din aceste numere care se formează sunt $2a + 2r, 2a + 3r, 2a + 4r, \ldots, 2a + 2nr$, în total $2n - 1$ sume. .... **2 puncte**

Acum vom demonstra implicația ”$\leftarrow$”.
Fie $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ n numere reale diferite două câte două. Considerăm următoarele sume:

$$a_1 + a_1 < a_1 + a_2 < a_1 + a_3 < \cdots < a_1 + a_{n-1} < a_1 + a_n < a_2 + a_n < \cdots < a_{n-1} + a_n < a_n + a_n,$$

în total $2n - 1$ sume. Încât se formează exact $2n - 1$ sume adunând orice două numere din cele n, iar sumele scrise mai sus sunt diferite două câte două, deducem că orice sumă posibilă a două din cele n numere se află printre cele enumerate anterior. .... **2 puncte**

Acum, să observăm că $a_1+a_{n-1} < a_2+a_{n-1} < a_2+a_n$ și în același timp, $a_1+a_{n-1} < a_1+a_n < a_2+a_n$ sunt trei termeni consecutivi din lanțul de $2n-1$ sume de mai sus. Așadar, este necesar ca $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1}$, deci $a_2 - a_1 = a_n - a_{n-1}$. .... **1 punct**

Continuăm după aceeași idee. Avem $a_1 + a_{n-2} < a_2 + a_{n-2} < a_2 + a_{n-1}$ $(= a_1 + a_n)$ și în același timp $a_1 + a_{n-2} < a_1 + a_{n-1} < a_1 + a_n$ sunt trei termeni consecutivi în lanțul de $2n-1$ sume de mai sus. Așadar, este necesar ca $a_1 + a_{n-1} = a_2 + a_{n-2}$, deci $a_2 - a_1 = a_{n-1} - a_{n-2}$.

Repetăm procedeul până ajungem la $a_2 - a_1 = a_3 - a_2$. Dar, în acest mod, tocmai am obținut că numerele $a_1, a_2, \ldots, a_n$ formează o progresie aritmetică, de unde reiese concluzia.
.... **2 puncte**

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Problema 2. Pentru un număr natural fixat $n \geq 2$, notăm cu F_n mulţimea funcţiilor $f : \{1, 2, \dots, n\} \to \{1, 2, \dots, n\}$ cu proprietatea că $f(i) + f(j) = n + 1$ dacă $i + j = n + 1$ pentru $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.
a) Determinaţi numărul elementelor mulţimii F_n.
b) Câte funcţii din F_n sunt surjective?

Vasile Pop

Barem a). Considerăm perechile a căror sumă este $n + 1$:

$$(1, 2k), (2, 2k - 1), \dots, (k, k + 1), \text{ dacă } n = 2k \text{ este par}$$

$$(1, 2k + 1), (2, 2k), \dots, (k, k + 2), (k + 1, k + 1), \text{ dacă } n = 2k + 1 \text{ este impar}$$

.... 1 punct

Fiecare valoare $f(1)$, $f(2), \dots$, $f(k)$ în cazul $n = 2k$ şi $f(1)$, $f(2), \dots$, $f(k)$, $f(k+1)$ în cazul $n = 2k+1$ poate fi aleasă în n moduri (independent) iar valorile $f(k+1), f(k+2), \dots, f(2k)$ în cazul $n = 2k$, respectiv $f(k + 2), f(k + 3), \dots, f(2k + 1)$ în cazul $n = 2k + 1$ sunt determinate de relaţiile

$$f(k + 1) = n + 1 - f(k),\ f(k + 2) = n + 1 - f(k - 1), \dots$$

respectiv

$$f(k + 2) = n + 1 - f(k),\ f(k + 3) = n + 1 - f(k - 1), \dots$$

.... 2 puncte

Avem deci $|F_n| = n^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}$. .... 2 puncte

b). Orice funcţie surjectivă este în acelaşi timp injectivă. Raţionăm ca la a): $f(1)$ îl putem alege în $n = 2k$ moduri, $f(2)$ îl putem alege în $2k - 1$ moduri (dintre numerele rămase), $f(3)$ în $2k - 2$ moduri,$\dots$, $f(k)$ în $k + 1$ moduri şi în total în cazul $n = 2k$ obţinem:

$$N = (2k)(2k - 1) \cdots (k + 1)$$

funcţii injective (şi surjective).

În cazul $n = 2k + 1$ obţinem

$$N = (2k + 1)(2k) \cdots (k + 2)(k + 1).$$

În concluzie,

$$N = n(n - 1) \cdots \left(\left[\frac{n}{2}\right] + 1\right)$$

.... 3 puncte

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Problema 3. Se consideră patrulaterul inscriptibil $ABCD$ cu diagonalele perpendiculare şi $AB = 1$. Fie $r > 0$ raza cercului înscris în triunghiul ABD.
a) Arătaţi că $CD^2 \geq 16r^2 - 1$.
b) Determinaţi aria patrulaterului $ABCD$, dacă $CD^2 = 16r^2 - 1$.

Radu Pop

Barem a) Fie $AC \cap BD = \{E\}$, iar punctele M, N, P, Q mijloacele laturilor $[AB]$, $[CD]$, respectiv ale diagonalelor $[AC]$ şi $[BD]$ .... 1 punct

Fie O centrul cercului circumscris patrulaterului $ABCD$ .... 1 punct

Avem $\overrightarrow{EA} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{EC} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{EO} + \overrightarrow{OD}$
se deduce că $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2 \cdot \overrightarrow{OE}$ .... 1 punct

Deduce $[EN] \equiv [OM]$ .... 1 punct

Deduce $CD^2 + 1 = 4 \cdot R^2$ .... 1 punct
Cum $R \geq 2r$ rezultă $CD^2 \geq 16r^2 - 1$ .... 1 punct

b) Dacă $R = 2r$, atunci ABD este un triunghi echilateral cu lungimea laturii egală cu 1

$\mathcal{A}_{ABCD} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ .... 1 punct

Concursul Interjudeţean de Matematică "Grigore C. Moisil"
Ediţia a XXXIV-a, Baia Mare, 5 – 7 aprilie 2019

Clasa a IX-a

Problema 4. Fie în plan punctele A, B, C distincte şi necoliniare. Arătaţi că dacă există un punct X în plan astfel încât

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{a}{c}-\frac{b}{c}-\frac{c}{b}\right)\overrightarrow{XA}+\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{c}-\frac{a}{c}-\frac{c}{a}\right)\overrightarrow{XB}+\left(\frac{c}{a}+\frac{c}{b}-\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{0},$$

atunci triunghiul ABC este echilateral, notaţiile fiind cele uzuale.

Gheorghe Râmbu

Barem

Se scrie forma echivalentă a relaţiei
$\left(a^2(b+c)-a\left(b^2+c^2\right)\right)\overrightarrow{XA}+\left(b^2(a+c)-b\left(a^2+c^2\right)\right)\overrightarrow{XB}+\left(c^2(a+b)-c\left(a^2+b^2\right)\right)\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{0}$,
.... 2 puncte

$$\left(\frac{a^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{a}{a+b+c}\right)\overrightarrow{XA}+\left(\frac{b^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{b}{a+b+c}\right)\overrightarrow{XB}+\left(\frac{c^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{c}{a+b+c}\right)\overrightarrow{XC}=\overrightarrow{0}$$
.... 2 puncte

Se deduce $\overrightarrow{XS}=\overrightarrow{XI}$, unde I este punctul de intersecţie al bisectoarelor triunghiului ABC şi S este punctul de intersecţie al simedianelor în triunghiul ABC .... 2 puncte

din $S=I$ rezultă că simedianele sunt şi bisectoare, deci medianele sunt bisectoare, atunci ABC este triunghi echilateral .... 1 punct